

BAB 2



Teorema Pythagoras



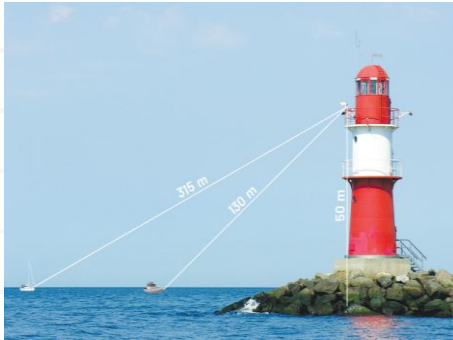


Tujuan Pembelajaran

1. Menjelaskan pembuktian teorema Pythagoras.
2. Mengidentifikasi tripel Pythagoras.
3. Membedakan jenis sudut pada segitiga menggunakan teorema Pythagoras atau kebalikan teorema Pythagoras.
4. Membandingkan sisi pada segitiga siku-siku istimewa.
5. Menentukan jarak antara dua titik pada bidang koordinat Cartesius.
6. Memecahkan masalah terkait teorema Pythagoras.



Observasi



Mercusuar merupakan bangunan menara yang berfungsi sebagai alat bantu navigasi kapal laut. Pada mercusuar, terdapat lampu sorot yang berputar untuk membantu kapal menentukan lokasi dan arah.

Mercusuar juga digunakan untuk menandai daerah-daerah berbahaya, misalnya perairan dengan batu karang dan perairan yang dangkal. Di Indonesia, terdapat 285 buah mercusuar yang tersebar di sejumlah daerah.

Zona Logika

Perhatikan gambar mercusuar di atas. Dari atas mercusuar setinggi 50 meter, diperoleh data bahwa jarak kemiringan terhadap dua kapal yang sejajar adalah 315 meter dan 130 meter. Diskusikanlah pertanyaan-pertanyaan berikut.

- Apakah kita dapat menghitung jarak datar (horizontal) masing-masing kapal ke mercusuar?
- Berapakah jarak antara kedua kapal sekarang?

A.

Menemukan dan Membuktikan Teorema Pythagoras

Pertanyaan Pemantik

Televisi diproduksi dalam berbagai ukuran, misalnya 32 inci, 55 inci, bahkan 100 inci. Ukuran tersebut menunjukkan panjang diagonal televisi. Perhatikan ukuran televisi pada gambar di samping.

1. Bagaimana cara menghitung panjang diagonal televisi sesuai dengan ukuran tersebut?
2. Panjang, lebar, dan diagonal televisi membentuk sisi segitiga siku-siku. Apa yang kamu ketahui tentang segitiga siku-siku?
3. Sisi-sisi pada segitiga siku-siku memiliki hubungan satu sama lain. Hubungan tersebut dinyatakan dalam teorema Pythagoras. Tahukah kamu bagaimana hubungan tersebut?



A.

Menemukan dan Membuktikan Teorema Pythagoras

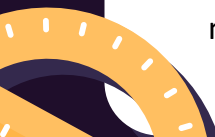
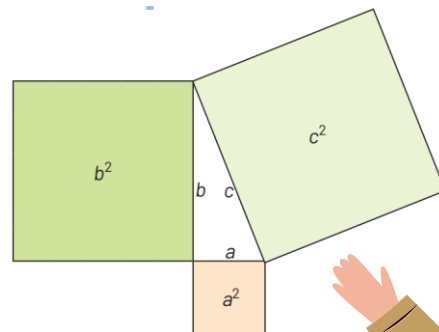
1. Menemukan Teorema Pythagoras pada Segitiga Siku-Siku

Perhatikan hasil peragaan dari hubungan antara luas persegi yang menjadi sisi siku-siku segitiga dengan luas persegi yang menjadi sisi miring segitiga pada gambar di samping.

Berdasarkan hasil peragaan tersebut, apakah dapat diduga secara umum bahwa jumlah luas persegi sisi tegak, $a^2 + b^2$ sama dengan luas persegi sisi miring c^2 ? Secara aljabar berarti:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Artinya, apakah jumlah luas persegi pada sisi siku-sikunya sama dengan luas persegi pada sisi miring? Kesimpulan tersebut dikenal sebagai **teorema Pythagoras pada segitiga siku-siku**.

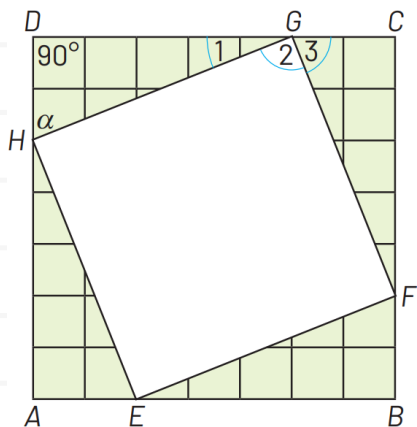


A.

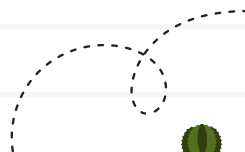
Menemukan dan Membuktikan Teorema Pythagoras

2. Membuktikan Teorema Pythagoras Secara Deduktif

Terdapat dua tahap pernyataan yang harus dibuktikan.

a. Pembuktian bahwa segi empat yang ada di sisi miringnya ($EFGH$) berbentuk persegi**Diketahui:**

Segi empat $ABCD$ berbentuk persegi. Keempat segitiga siku-siku yang berada di bagian-bagian pojoknya kongruen (bentuk dan ukurannya sama). Buktikan bahwa $\angle G_2$ adalah sudut siku-siku atau $\angle G_2 = 90^\circ$.



A.

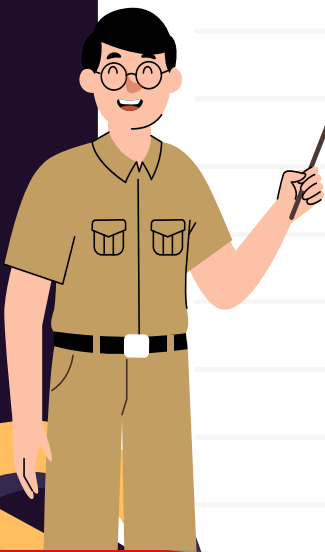
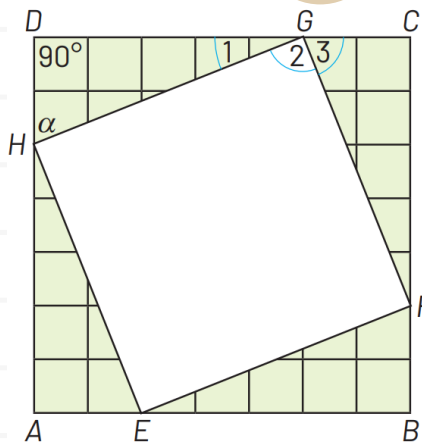
Menemukan dan Membuktikan Teorema Pythagoras



Bukti:

Misalkan $\angle DHG = \alpha$. Pembuktian bahwa $\triangle DGH$ siku-siku disajikan pada tabel berikut.

No.	Pernyataan	Alasan
1.	$\angle G_1 = 90^\circ - \alpha$	Jumlah sudut dalam setiap segitiga = 180° sehingga $\angle G_1 = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$.
2.	$\angle G_3 = \alpha$	$\triangle DGH$ seukuran dengan $\triangle CFG$ sehingga $\angle G_3 = \angle H = \alpha$.
3.	$\angle G_2 = 180^\circ - \angle(G_1 + G_3)$ $= 180^\circ - 90^\circ$ $= 90^\circ$ (terbukti)	$\angle G_1 + \angle G_3 = (90^\circ - \alpha) + \alpha = 90^\circ$.



A.

Menemukan dan Membuktikan Teorema Pythagoras

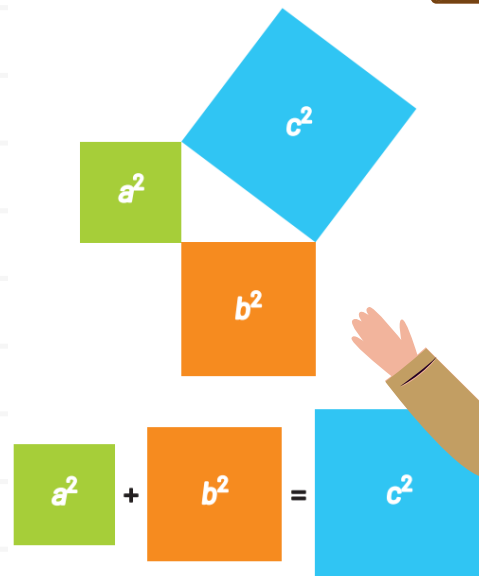
b. Pembuktian kebenaran teorema Pythagoras secara deduktif

Berlaku:

“Pada segitiga siku-siku, jumlah luas persegi yang dibentuk oleh masing-masing sisi siku-sikunya sama dengan luas persegi yang dibentuk oleh sisi miringnya.”

Pernyataan tersebut dapat digambarkan seperti gambar di samping.

Rumus $a^2 + b^2 = c^2$ pada segitiga siku-siku dikenal dengan rumus atau **teorema Pythagoras**.



A.

Menemukan dan Membuktikan Teorema Pythagoras

2. Teknik Penarikan Akar Kuadrat Menurut Rudolff

Dengan menggunakan teknik perhitungan Rudolff, bilangan yang akan dicari akar kuadratnya dipisahkan per dua angka mulai dari belakang. Proses penarikan akar dimulai dari kelompok angka paling depan. Misalnya, kita akan menghitung penarikan akar dari bilangan 3.969.

Teknik penarikan akar	Langkah-langkah pengerjaan
$\sqrt{3.969} = \dots$ $\begin{array}{r} \sqrt{39\ 69} \\ \underline{6\ 6} \\ 36\ \\ 69 \\ \underline{3\ 6} \\ 0 \end{array}$ <p>Hasil akhir $\boxed{63}$</p>	<ol style="list-style-type: none"> Pisahkan angkanya dua-dua dari belakang. Carilah bilangan yang kuadratnya maksimum sama dengan kelompok angka pertama (bilangan 39). Bilangan yang dimaksud adalah $6 \times 6 = 36 < 39$. Sisanya $39 - 36 = 3$. Kemudian, turunkan dua angka sekaligus sehingga diperoleh 369. Jumlahkan 6 dengan 6. Hasil = 12. Selanjutnya, cari $12\Box \times \Box = 369$. Ternyata isi $\Box = 3$ dan sisanya = 0. Dengan demikian, diperoleh $\sqrt{3.969} = 63$.

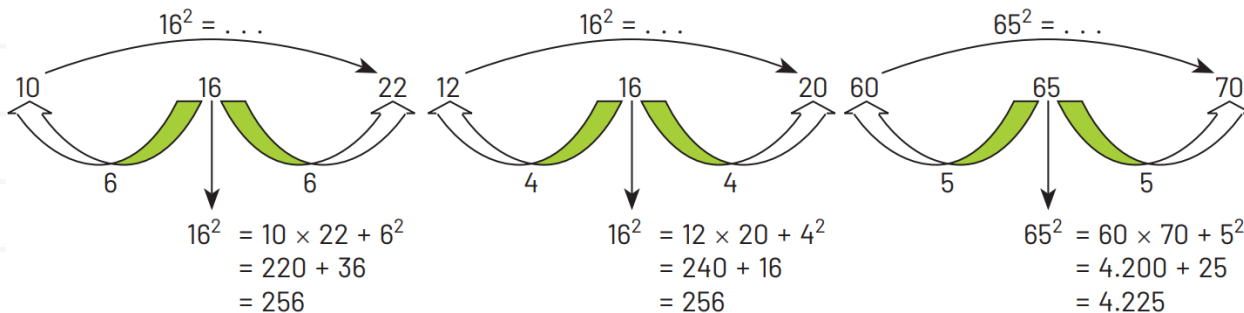
A.

Menemukan dan Membuktikan Teorema Pythagoras

Selain menggunakan teknik Rudolff, terdapat teknik lain, yaitu teknik menguadratkan dengan cara cepat. Teknik tersebut diperoleh dari identitas atau kesamaan aljabar berbentuk:

$$a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$$

Dengan menggunakan identitas aljabar tersebut, pengkuadratan suatu bilangan dapat dilakukan secara lebih cepat dan lebih mudah. Misalkan kita akan menghitung kuadrat dari bilangan 16 dan 65. Gambaran dari teknik perhitungannya adalah sebagai berikut.



A.

Menemukan dan Membuktikan Teorema Pythagoras

Teknik Menguadratkan

- Letakkan bilangan yang akan dikuadratkan di bagian tengah, misalkan 16.

$$16^2 = 10 \times 22 + 6^2 = 220 + 36 = 256$$

$$16^2 = 12 \times 20 + 4^2 = 240 + 16 = 256$$

$$65^2 = 60 \times 70 + 5^2 = 4.200 + 25 = 4.225$$

- Naikkan atau turunkan bilangan 16 ke bilangan yang perkaliannya mudah dihitung, misalnya 10 atau 20.
- Jika 16 kita turunkan ke bilangan 10, berarti turun 6. Oleh karena diturunkan 6, bilangan di sebelah kanannya harus dinaikkan 6 sehingga menjadi 22. Sebaliknya, jika kita memilih 16 dinaikkan ke bilangan 20, yakni naik 4, bilangan di sebelah kirinya harus diturunkan 4 sehingga menjadi 12.
- Perhatikan kedua cara menguadratkan bilangan 16 tersebut. Keduanya memberikan hasil akhir sama, yakni 256.





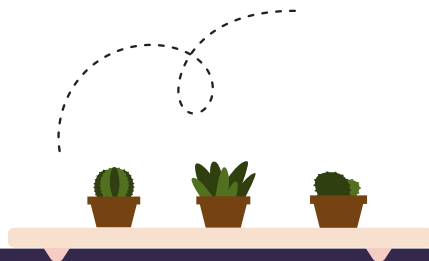
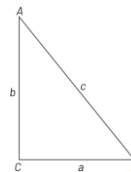
AYO UJI PEMAHAMANMU!

Untuk melatih kemampuanmu tentang
Teorema Pythagoras, kerjakan Asesmen
Formatif halaman 68 sampai 70



B.**Kebalikan (Konvers) dari Teorema Pythagoras****Pertanyaan Pemantik**

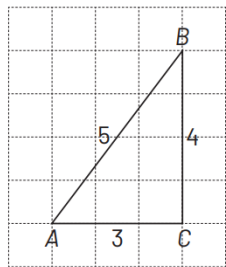
1. Selain segitiga siku-siku, apa jenis segitiga yang kamu ketahui? Apa perbedaan dari setiap jenis segitiga tersebut?
2. Adakah tiga sisi pada segitiga yang tidak memenuhi teorema Pythagoras?
3. Bagaimana menentukan jenis sudut pada sebuah segitiga jika diketahui sisi-sisinya?



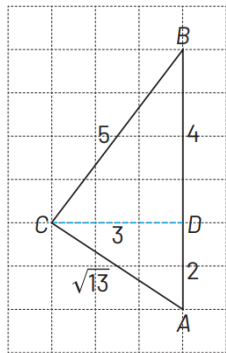
B. Kebalikan (Konvers) dari Teorema Pythagoras

1. Pembuktian secara Kontekstual

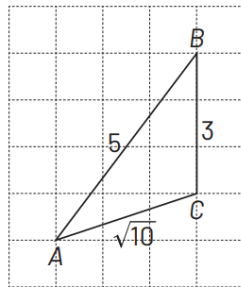
Berikut adalah gambaran beberapa contoh tentang $\triangle ABC$ yang memenuhi dan tidak memenuhi rumus Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$.



(a)



(b)



(c)

Untuk $\triangle ABC$ siku-siku (gambar (a)),

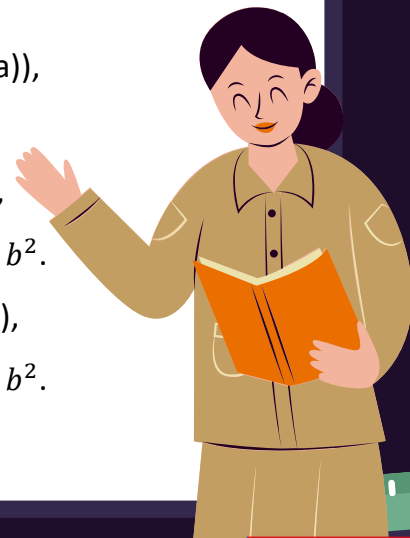
$$5^2 = 3^2 + 4^2 \text{ atau } c^2 = a^2 + b^2.$$

Untuk $\triangle ABC$ lancip (gambar (b)),

$$6^2 < 5^2 + (\sqrt{13})^2 \text{ atau } c^2 < a^2 + b^2.$$

Untuk $\triangle ABC$ tumpul (gambar (c)),

$$5^2 > 3^2 + (\sqrt{10})^2 \text{ atau } c^2 > a^2 + b^2.$$



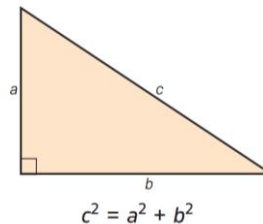
B.

Kebalikan (Konvers) dari Teorema Pythagoras

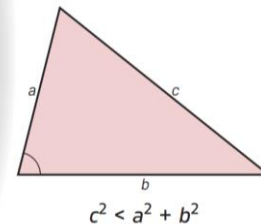
Berdasarkan ketiga contoh hubungan (relasi) panjang sisi pada ketiga jenis segitiga tersebut, secara umum untuk setiap $\triangle ABC$ dengan sisi a, b , dan c , di mana c adalah sisi terpanjang, berlaku sebagai berikut.

- Jika $c^2 = a^2 + b^2$, maka $\triangle ABC$ merupakan segitiga siku-siku.
- Jika $c^2 < a^2 + b^2$, maka $\triangle ABC$ merupakan segitiga lancip.
- Jika $c^2 > a^2 + b^2$, maka $\triangle ABC$ merupakan segitiga tumpul.

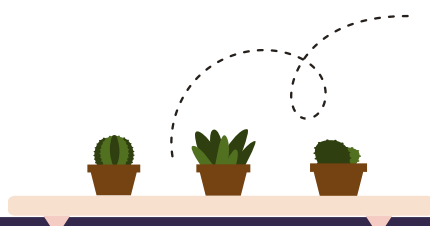
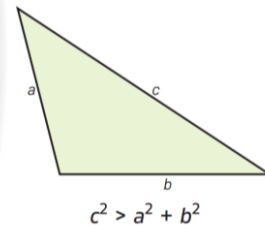
Segitiga Siku-Siku



Segitiga Lancip

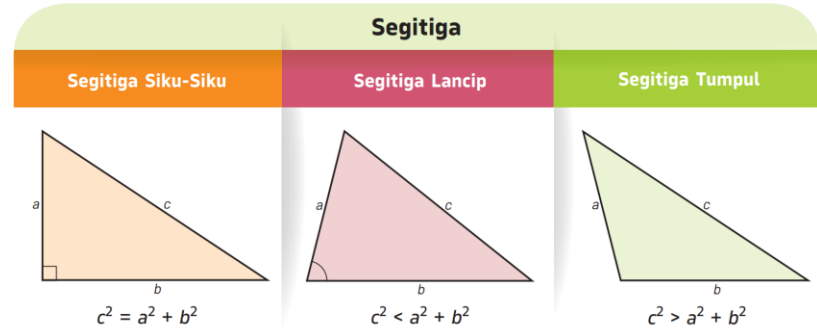


Segitiga Tumpul



B. Kebalikan (Konvers) dari Teorema Pythagoras

Mengacu pada generalisasi tersebut, untuk selanjutnya yang dimaksud sebagai teorema kebalikan (konvers) dari teorema Pythagoras adalah sebagai berikut.



Teorema Kebalikan dari Teorema Pythagoras

Jika a , b , dan c adalah panjang sisi-sisi $\triangle ABC$ dengan c sisi terpanjang dan berlaku bahwa $c^2 = a^2 + b^2$, maka $\triangle ABC$ adalah segitiga siku-siku.



B. Kebalikan (Konvers) dari Teorema Pythagoras

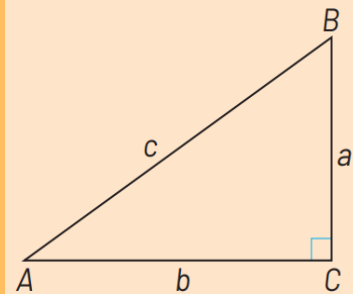
2. Pembuktian secara Formal (Deduktif)

Pada pembuktian secara kontekstual, sudah terbukti jika pada $\triangle ABC$ dengan sisi terpanjang c dipenuhi syarat $c^2 = a^2 + b^2$, maka $\triangle ABC$ adalah segitiga siku-siku dan sebaliknya juga terbukti jika c sisi terpanjang $\triangle ABC$ memenuhi $c^2 = a^2 + b^2$. Diperoleh $\triangle ABC$ adalah segitiga siku-siku sehingga pembuktian teorema Pythagoras terbukti.

Untuk setiap $\triangle ABC$ siku-siku, berlaku teorema Pythagoras:

$\triangle ABC$ dengan sisi terpanjang c adalah segitiga siku-siku $\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$.

Dibaca: "Segitiga ABC dengan sisi terpanjang c adalah segitiga siku-siku jika dan hanya jika $c^2 = a^2 + b^2$ ".





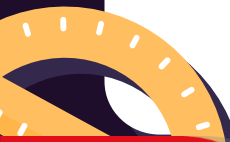
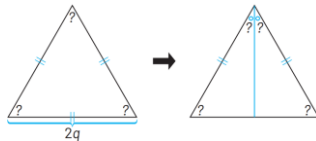
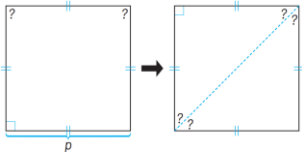
AYO UJI PEMAHAMANMU!

Untuk melatih kemampuanmu tentang
Kebalikan dari Teorema Pythagoras, kerjakan
Asesmen Formatif halaman 75 dan 76

C. Perbandingan Sisi Segitiga Siku-Siku Bersudut Istimewa

Pertanyaan Pemantik

1. Berapakah besar masing-masing sudut pada sebuah persegi? Jika ditarik sebuah garis diagonal, berapakah besar sudut yang dibentuk oleh garis diagonal dengan salah satu sisinya?
2. Berapakah besar masing-masing sudut pada sebuah segitiga sama sisi? Berapakah besar sudut yang dibentuk oleh garis bagi pada segitiga sama sisi terhadap salah satu kaki sudutnya?

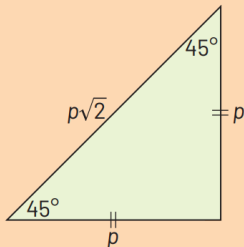


C.

Perbandingan Sisi Segitiga Siku-Siku Bersudut Istimewa

Perbandingan Sisi-Sisi Segitiga Siku-Siku Bersudut Istimewa.

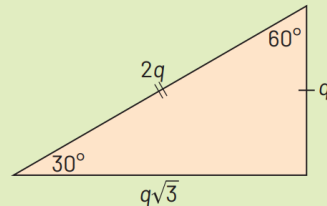
Segitiga dengan sudut $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.



Perbandingan sisi-sisi

$$p : p : p\sqrt{2} \\ 1 : 1 : \sqrt{2}$$

Segitiga dengan sudut $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.



Perbandingan sisi-sisi

$$q : q\sqrt{3} : 2q \\ 1 : \sqrt{3} : 2$$

Untuk selanjutnya, sudut-sudut yang memiliki besar $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$, dan 90° dikenal sebagai sudut istimewa.



AYO UJI PEMAHAMANMU!

Untuk melatih kemampuanmu tentang
Perbandingan Sisi Segitiga Siku-Siku Bersudut
Istimewa, kerjakan Asesmen Formatif
halaman 80 dan 81



D.

Penggunaan Teorema Pythagoras dalam Pemecahan Masalah

Pertanyaan Pemantik

Perhatikan gambar di samping. Misalkan posisi Adi dan sekolahnya digambarkan pada bidang koordinat Cartesius. Posisi Adi di titik $(12, 0)$, sedangkan posisi sekolah Adi di titik $(0, 5)$.

1. Gambarkan kedua posisi tersebut pada bidang koordinat Cartesius.
2. Dapatkah kamu menentukan jarak dari posisi Adi ke posisi sekolahnya? jelaskan caranya.



D.

Penggunaan Teorema Pythagoras dalam Pemecahan Masalah

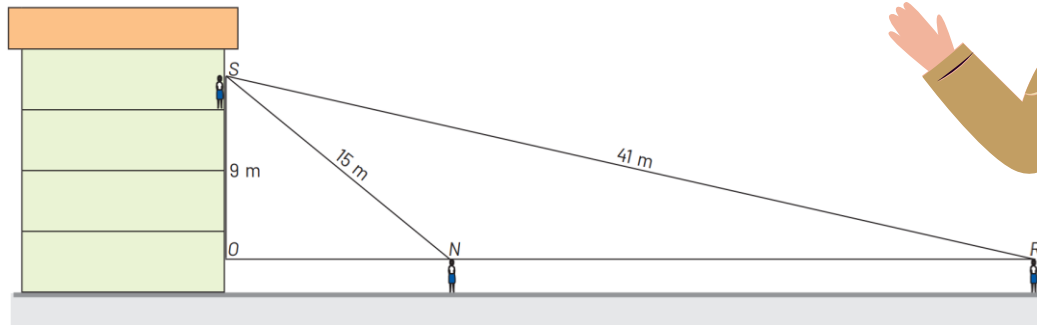
1. Menggunakan Rumus Pythagoras dalam Pemecahan Masalah

Perhatikan contoh soal dan pembahasan berikut.

Silvia berdiri di lantai tiga gedung sekolahnya dengan ketinggian 9 meter. Ia melihat dua orang temannya di lapangan sekolah, yaitu Nuri dengan jarak pandang 15 meter dan Risna dengan jarak pandang 41 meter. Jika Nuri dan Risna berada pada satu garis lurus, tentukan jarak antara Nuri dan Risna.

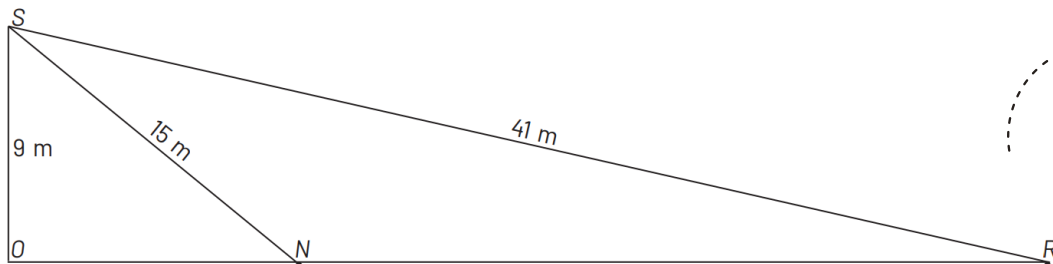
Pembahasan:

Perhatikan gambar berikut.



D.

Penggunaan Teorema Pythagoras dalam Pemecahan Masalah



Jarak antara Nuri dan Risna adalah $NR = OR - ON$.

$$ON^2 = NS^2 - OS^2$$

$$ON^2 = 15^2 - 9^2$$

$$ON^2 = 225 - 81$$

$$ON^2 = 144$$

$$ON = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

$$OR^2 = RS^2 - OS^2$$

$$OR^2 = 41^2 - 9^2$$

$$OR^2 = 1.681 - 81$$

$$OR^2 = 1.600$$

$$OR = \sqrt{1.600} = 40 \text{ cm}$$

sehingga $NR = OR - ON$

$$= 40 - 12$$

$$= 28 \text{ m}$$

Jadi, jarak antara Nuri dan Risna adalah 28 cm.





AYO UJI PEMAHAMANMU!

Untuk melatih kemampuanmu tentang
Penggunaan Teorema Pythagoras dalam
Pemecahan Masalah, kerjakan Asesmen Formatif
halaman 86 dan 87



D.

Penggunaan Teorema Pythagoras dalam Pemecahan Masalah

2. Menentukan Jarak Antara Dua Titik pada Bidang Koordinat Cartesius

Diketahui suatu ruas garis pada bidang koordinat Cartesius melalui dua titik. Jika ruas garis tersebut tidak vertikal ataupun horizontal, apakah kita dapat menghitung panjangnya?

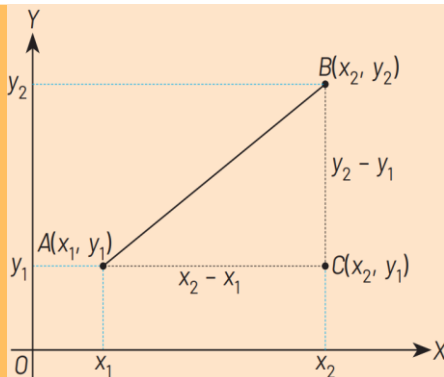
Jarak antara dua titik pada bidang koordinat Cartesius adalah sebagai berikut.

Berdasarkan teorema Pythagoras, jarak antara titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ adalah:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$





AYO UJI PEMAHAMANMU!

Untuk melatih kemampuanmu tentang
Menentukan Jarak Antara Dua Titik, kerjakan
Asesmen Formatif halaman 91





**Terima
Kasih**